



O que é o GPS ?

O sistema GPS (*Global Positioning System*) é composto atualmente por 24 satélites ativos e 3 de reserva colocados numa órbita a 20.200 km de altitude, e distribuídos por 6 planos orbitais diferentes para que qualquer ponto da superfície da Terra esteja, em qualquer momento, "em linha de vista" com pelo menos 4 satélites.

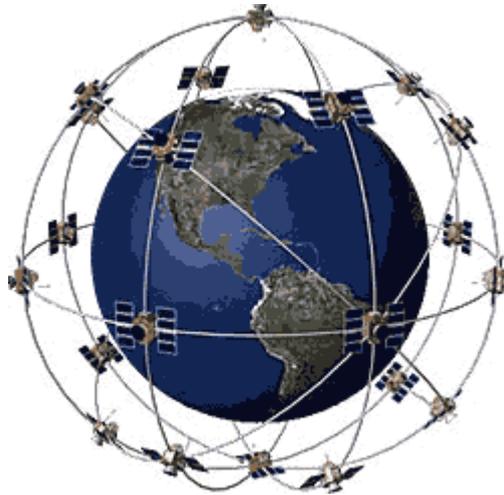


Figura 1 - Constelação de satélites GPS

Inicialmente criado com intuítos exclusivamente militares e gerido pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos foi definitivamente aberto à utilização pública no ano 2000. E a partir dessa data ficou disponível para todos a capacidade de determinação da posição geográfica e de navegação entre quaisquer dois pontos da superfície terrestre.

Este sistema, bem como os seus equivalentes, o europeu Galileu e o russo Glonass, recorrem a um processo geométrico de trilateração (e não "triangulação" como é frequente ler-se, erradamente, em vários documentos, livros, etc. Com efeito, este processo mede lados, as distâncias do objeto a cada um dos satélites e não os ângulos entre si. Não se procede a qualquer medida dos ângulos!)

Desde agosto de 2000 que, graças à introdução do WAAS (*Wide-Area Augmentation System*) que a precisão do GPS é inferior a 2 metros. E com o recurso ao DGPS (*Differential GPS*), utilizando emissores fixos, na superfície terrestre, essa precisão pode atingir 1 centímetro!

O sinal emitido pelos satélites para utilização civil, no canal primário L1, é transportado por uma onda de rádio na frequência de 1575.42 MHz.

Como é medida a distância do receptor aos satélites do GPS?

Tudo se resume a medir o tempo que o sinal emitido por cada satélite demora a atingir a nossa antena receptora. A velocidade a que este sinal se propaga pelo espaço vazio é, obviamente, de (cerca de)300.000 km/s. Depois é só multiplicar esta velocidade pelo tempo medido e obtemos a distância.

Então qual é o problema?

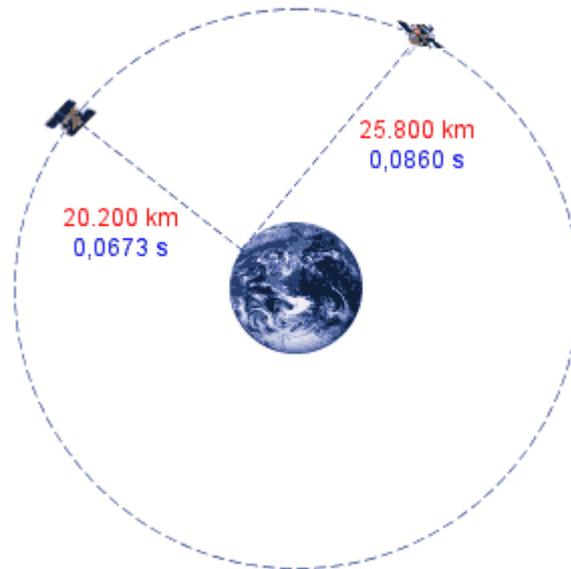
O problema é a enorme precisão exigida para se poder medir o tempo decorrido desde a emissão do sinal até à sua chegada ao receptor. É que estamos a falar da velocidade da luz ! E se o sinal viaja a 300 milhões de metros por segundo, então, para obtermos medições de distâncias com a precisão de 1 metro é preciso conseguir medir o tempo com uma precisão na ordem dos 0,000000003 segundos (entre 3 e 4 nanossegundos)!

Para medir diferenças temporais dessa ordem é necessário que todos os intervenientes, os satélites e os receptores, disponham de relógios extremamente precisos. Os satélites cumprem esse requisito pois possuem relógios atômicos caríssimos, mas os nossos receptores dispõem apenas de vulgares relógios de quartzo. Para ultrapassar esse inconveniente o sistema GPS recorre a um artifício engenhoso: faz com que o relógio do nosso receptor esteja constantemente a ser atualizado com a hora atômica transmitida pelos satélites do sistema GPS. De fato, o nosso PDA, telefone celular, ou qualquer outro equipamento que esteja ligado a uma antena de GPS apresenta a hora absolutamente correta. Nenhum relógio de pulso, por mais caro que seja, poderá competir com a precisão deste relógio atômico em que o nosso PDA se transformou!

De um satélite que esteja colocado exatamente por cima da nossa cabeça - ou seja, à mínima distância possível de 20.200km- o sinal demorará cerca de 0,0673 segundos (20.200/300.000) a chegar-nos. O sinal de um segundo satélite,



colocado perto do horizonte terrestre à máxima distância (teórica) possível para estar em "linha de vista", ou seja, a cerca de 25.800km de distância de nós, demorará, em teoria, cerca de 0,0860s (25.800/300.000) a atingir o nosso receptor.



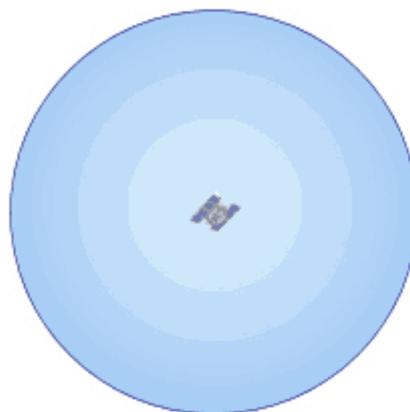
No entanto estes são os casos extremos. Os 4 satélites necessários estarão necessariamente em posições intermédias destas e mais próximas entre si. Considerando um exemplo em que um satélite esteja a 45º do horizonte estará à distância de cerca de 21.683 km e o sinal demorará 0,0723s até chegar ao nosso receptor.

Saber a que distância estamos de cada satélite chega para sabermos a nossa posição? Claro que não. Primeiro é preciso saber onde está cada satélite. Como podemos saber isso? São os próprios satélites que nos dizem. Cada um deles comunica ao nosso receptor, um almanaque com a sua posição no espaço em cada momento para podemos determinar a nossa própria posição.

Quantos satélites são necessários para determinar a nossa posição?

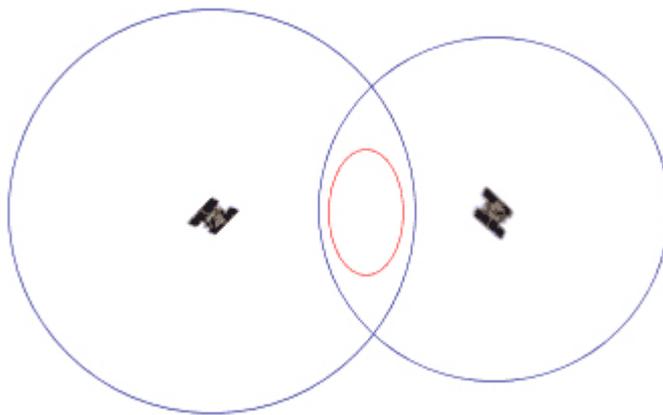
Em teoria, três! Mas leu algures que são necessários quatro? Bom, na prática são usados quatro. Vejamos melhor porquê...

Com um satélite do qual conhecemos a distância a que está de nós, apenas nos é possível dizer que a nossa localização é um ponto qualquer sobre uma esfera imaginária com raio igual a essa distância:



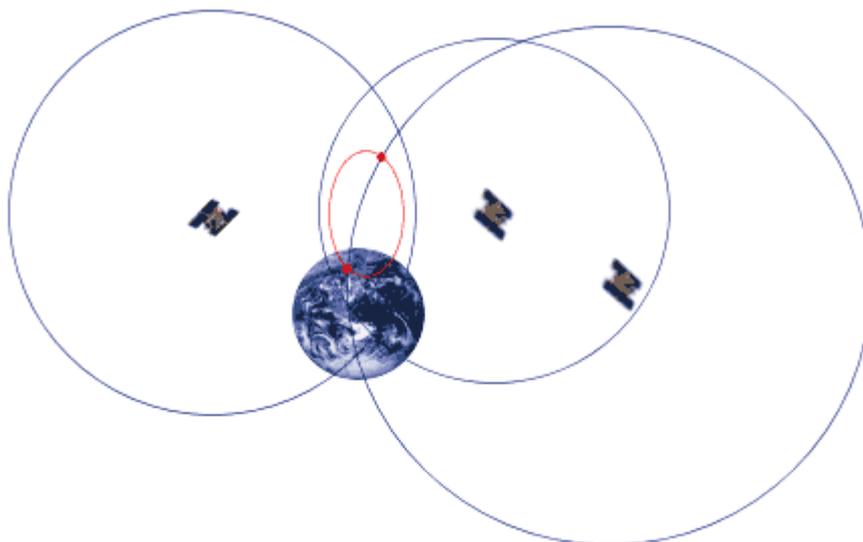
Ainda sabemos muito pouco sobre a nossa localização. As possibilidades são em número infinito, distribuídas por uma superfície esférica, em 3 dimensões espaciais.

Mas se conhecermos também a distância a que estamos de um segundo satélite, já nos é possível afirmar que a nossa posição é um ponto qualquer sobre a circunferência imaginária que resulta da intersecção das duas esferas:



Agora as possibilidades, embora sejam ainda em número infinito, já estão limitadas ao plano da circunferência, em duas dimensões.

Com um terceiro satélite, a intersecção desta última esfera com a circunferência reduz a ambiguidade sobre a nossa localização a 2 pontos. Mas como um dos pontos pode ser eliminado pela simples razão de se encontrar no espaço e nós sabemos estar na superfície da Terra....está encontrada a nossa posição



De fato o terceiro satélite é suficiente para determinar o ponto onde nos encontramos. Mas então...

Para que serve o quarto satélite ?

Primeiro que tudo: dispensa a utilização do raciocínio atrás descrito. O quarto satélite permite "escolher" um dos 2 pontos anteriormente determinados e sabermos, além da latitude e da longitude (duas dimensões), a altitude exata da nossa localização.

Mas, mais importante: permite verificar se existe o essencial sincronismo de todos os relógios.

De fato, se as medidas que o nosso receptor fez das distâncias forem perfeitas - com o seu relógio perfeitamente sincronizado com os dos satélites - então as 4 esferas intersectam-se num único ponto. Mas se as medidas forem imperfeitas, isso não acontecerá.

Então o receptor, alertado para o erro pela quarta medição, aplicará o fator de correção necessário para que as 4 esferas se intersectem num único ponto.

E é nesta altura que passamos a ter na nossa mão, como bônus, um relógio tão preciso quanto os mais caros relógios atômicos!

Como são calculadas as distâncias?

Como se viu antes, a determinação da nossa posição depende de um simples método geométrico de trilateração que se resume à medição das distâncias até três ou quatro pontos de referência, cuja posição é conhecida, os satélites do sistema GPS.



Como não é possível esticar uma fita métrica desde a nossa posição na Terra até cada um dos satélites, é necessário determinar a distância de outra forma. No caso vertente, medindo o tempo que um sinal - de velocidade conhecida - demora a chegar até nós e aplicando a fórmula:

$$v = \frac{e}{t}$$

em que, v = velocidade, e = espaço, t = tempo

A distância e, entre o nosso receptor e cada um dos satélites, é a incógnita que se pretende determinar. A velocidade v será, neste caso, a da luz, constante e conhecida. Mas o tempo t, decorrido entre a "partida" e a "chegada" do sinal, terá que ser calculado pelo nosso receptor de GPS. E é precisamente na medição precisa deste lapso de tempo que reside uma das dificuldades práticas da implementação do GPS dado que ela é afetada por diversos fatores que a podem causar distorção no sinal!

Nota: Adaptando esta fórmula ao caso específico do GPS temos $Pr = c(TS-TR)$ o chamado *pseudorange* que dá uma estimativa aproximada da distância a que o satélite se encontra do receptor.

O que pode provocar imperfeição das medições?

Existem vários fatores que podem afetar a exatidão das medições e, conseqüentemente, a determinação da posição precisa do receptor:

Ionosfera	até 5m
Dados da Efeméride	até 2,5m
Desvio dos relógios	até 2m
Reflexos	até 1m
Troposfera	até 0,5m

Tabela 1 - Fatores causadores de erros no receptor GPS

A velocidade (c) de propagação do sinal é diminuída ao atravessar a atmosfera. As duas camadas com interferência na forma de propagação da radiação eletromagnética são a ionosfera - por ser composta por átomos ionizados pela radiação solar - e a troposfera - por conter alto teor de umidade. Este efeito é imprevisível e é tanto maior quanto mais próximo o satélite estiver do horizonte. É usualmente corrigido pela aplicação de modelos, pela utilização de duas frequências diferentes (L1 e L2), etc.

A desatualização temporária dos dados transmitidos, uma vez que os almanaques são emitidos pelos satélites apenas a cada 12 minutos e meio e as efemérides a cada 30 segundos, também pode diminuir a precisão do GPS. O mesmo acontece devido aos eventuais e imprevisíveis reflexos do sinal provocados por edifícios altos, pela orografia do terreno circundante, etc.

Como é determinada a posição do receptor?

Uma vez conhecidas as distâncias a cada um dos satélites há que calcular as coordenadas tridimensionais da posição do nosso receptor: XR, YR e ZR.

Para isso há que recorrer novamente ao Teorema de Pitágoras e ao triângulo retângulo!

$$c(TS-TR) = ((XS - XR)^2 + (YS - YR)^2 + (ZS - ZR)^2)^{1/2}$$

em que:

c = velocidade da luz

TS = tempo da emissão

TR = tempo da recepção

XS, YS, ZS = posição do satélite

XR, YR, ZR = posição do receptor

Nota: o produto $c(TS-TR)$ constitui o chamado pseudorange.

Os parâmetros conhecidos são TS (a hora de emissão do sinal), XS, YS, ZS (a posição do satélite) e, claro, a velocidade do sinal c (299792,458 km/s).

As incógnitas são quatro: XR, YR, ZR (a posição do receptor) e TR (a hora de recepção do sinal).

Quatro incógnitas => quatro equações = > quatro satélites



Primeiro que tudo há que estabelecer um sistema de coordenadas cartesianas. O GPS utiliza um sistema ECEF (*Earth Centered - Earth Fixed*) - mais concretamente o WGS-84 - em que, como o próprio nome indica, se considera que o sistema de coordenadas tem origem no centro de massa da Terra e, estando-lhe fixo, roda com ela.

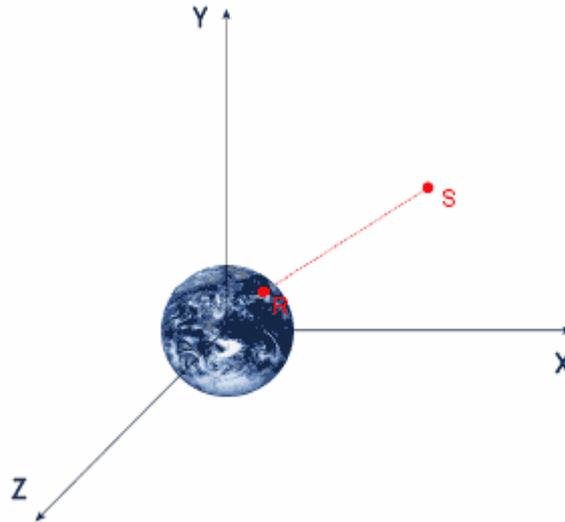
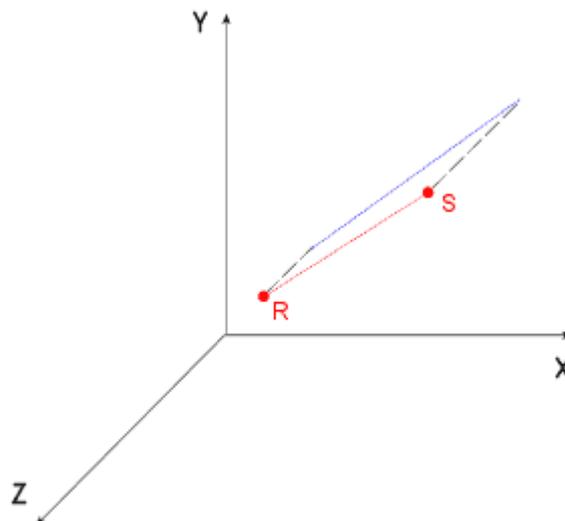


Figura 2 - No ECEF, o eixo "vertical" (o eixo de rotação da Terra) é o dos ZZ, o eixo dos XX é a intersecção do plano do meridiano principal (de Greenwich) com o plano do Equador

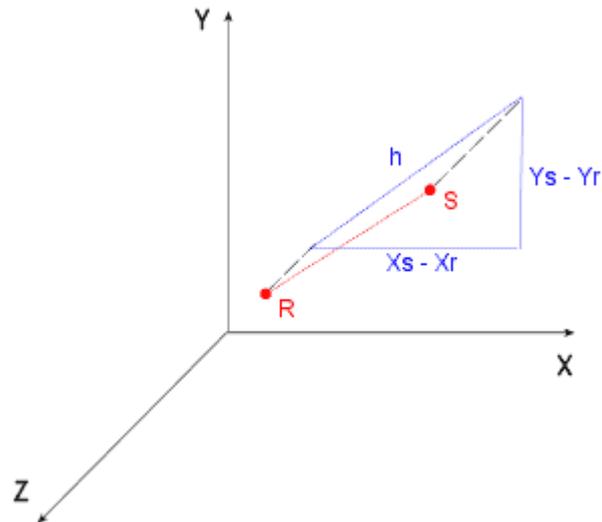
Para aumentar a clareza da imagem vamos "tirar a Terra da frente" e projetar a posição do satélite e do receptor, por agora apenas em 2D, no plano XY (rodando os eixos apenas para manter a orientação, mais familiar, de um sistema cartesiano a duas dimensões: com o eixo dos YY na vertical e dos XX na horizontal).



E agora vamos utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar a distância h , no plano XY, entre o satélite S e o receptor R.

$$\text{ou seja: } h = \sqrt{(X_S - X_R)^2 + (Y_S - Y_R)^2}$$

E o passo seguinte - uma nova aplicação do mesmo Teorema - permite-nos determinar a distância SR. Vendo "por cima", para ficar mais claro...



ou seja:

$$SR = (h^2 + (ZS - ZR)^2)^{1/2}$$

$$SR = ((XS - XR)^2 + (YS - YR)^2 + (ZS - ZR)^2)^{1/2}$$

$$c(TS - TR) = ((XS - XR)^2 + (YS - YR)^2 + (ZS - ZR)^2)^{1/2}$$

Nota final:

É evidente que existem outros cálculos matemáticos mais complexos envolvidos na implementação prática do GPS, nomeadamente no que diz respeito aos modelos a aplicar, por exemplo, para corrigir os efeitos do atravessamento da troposfera e da ionosfera, à conversão de coordenadas entre ECEF e ECI, etc.

Os cálculos e raciocínios atrás descritos permitem, no entanto, ter-se noção dos fundamentos trigonométricos que servem de base a toda a implementação do GPS ou de qualquer outro sistema semelhante.



Questionário dirigido ao artigo:

- 1 Cite duas implementações ao GPS que contribuíram para o aumento da precisão do sistema.
- 2 Cite e explique resumidamente quatro fatores que degradam a precisão do sistema GPS.
- 3 Qual o principal motivo da necessidade de um quarto satélite para a determinação da localização do receptor GPS.
- 4 Explique o que aconteceria com um receptor que apresentasse uma defasagem de 2 segundos do relógio atômico embarcado nos satélites da constelação GPS.